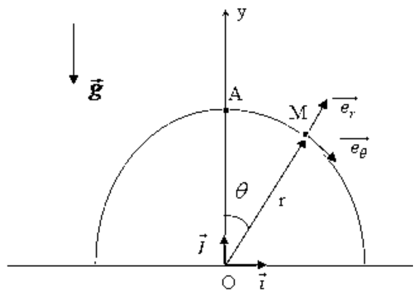
ROYAUME DU MAROC
UNIVERSITE ABDELMALEK ESSAADI
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Tanger

Année universitaire 2014-2015

TDN°4 : Dynamique du point Matériel

Exercice 1

Dans le référentiel galiléen $R(O\,x\,y\,z)$ muni de la base OND$(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, un anneau M , de masse m, glisse sans frottement sur une tige circulaire de rayon r. La position instantanée de l'anneau M est définie par l'angle θ représenté sur le schéma
Initialement, l'anneau est au point A où $\theta = 0$. En ce point, la vitesse du mobile est pratiquement nulle.

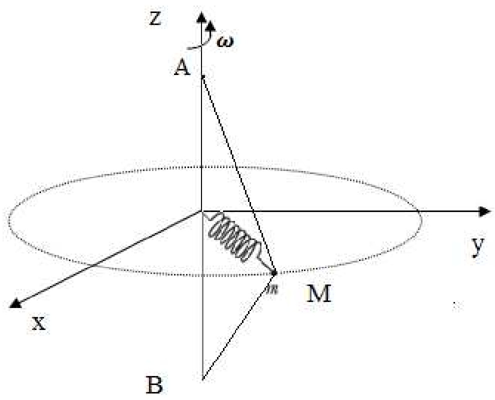


1°) Exprimer dans la base polaire$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, la vitesse et l'accélération de l'anneau M par rapport au référentiel(R).

2°) En appliquant le P.F.D dans(R), déterminer l'équation différentielle du mouvement ainsi que la réaction du support en fonction de m, g et θ (où g est l'accélération de la pesanteur).

Exercice 2

Dans un référentiel galiléen $R(O\,x\,y\,z)$ muni de la base OND $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, une petite bille M de masse m, est reliée à deux points A et B situés de part et d'autre de l'origine O sur l'axe vertical $\overrightarrow{OZ}$ (avec $OA = OB = \ell_1$) par l'intermédiaire de deux fils MA et MB inextensibles et sans masse ($MA = MB = \ell_2 \rangle \ell_1$). La bille M est aussi reliée à l'origine O par l'intermédiaire d'un ressort de masse négligeable, à spires non jointives, de longueur initial $\ell_0 \langle \sqrt{\ell_2^2 - \ell_1^2}$ (position horizontale) et de raideur ***k***.



L'axe $\overrightarrow{OZ}$ tourne autour de lui-même avec une vitesse angulaire constante ω (le ressort se déforme dans son domaine d'élasticité).

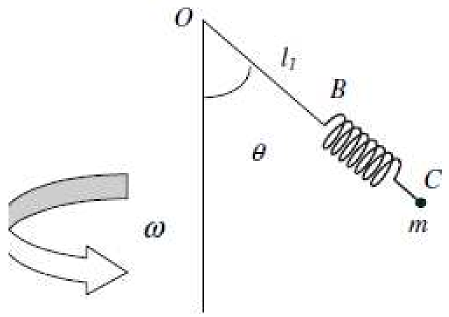
1°) Déterminer la vitesse et l'accélération de la bille M par rapport au référentiel(R).

2°) Déterminer la force de rappel du ressort.

3°) En appliquant le P.F.D dans(R), déterminer les tensions des fils MA et MB.

Exercice 3 :

On dispose d'un ressort à boudin *BC*, de raideur k = 20 N.m^{-1}, de masse négligeable, de longueur à vide l_o = 10 cm et d'une masse m = 100 g considérée comme ponctuelle fixée à l'une de ses extrémités. On attache l'extrémité *B* du ressort à un fil inextensible de masse négligeable, de longueur l_1 = 40 cm. L'autre extrémité du fil est fixée à l'extrémité supérieure d'une tige verticale qui, en tournant, entraîne le fil, le ressort et la masse d'un mouvement de rotation uniforme. Après un régime transitoire, l'angle θ entre le fil et la tige verticale prend une valeur constante égale à 60°.



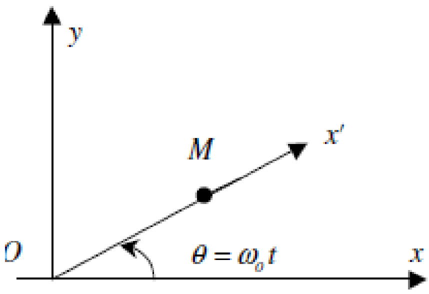
1) Calculer la tension du ressort et sa longueur.

2) Quelle est, en nombre de tours par seconde, la vitesse de rotation de la tige ? On prendra g = 10 m.s^{-2}.

Exercice 4

Le mobile *M* est un anneau enfilé sur l'axe rigide *Ox'*. Il peut glisser sur *Ox'* sans frottement et on néglige la pesanteur (alors l'anneau n'est soumis qu'à une réaction normale de l'axe rigide). L'axe *Ox'* tourne dans le plan *xOy* à la vitesse angulaire constante ω_o. Le repère *xOy* est un repère galiléen.

À l'instant $t = 0$, $\theta = 0$, $\rho = \rho_o$, $\frac{d\rho}{dt} = 0$



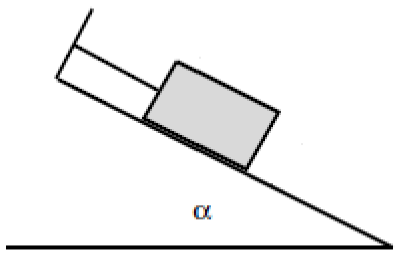
1) Écrire l'équation fondamentale de la dynamique dans le repère fixe *xOy*.

2) Déterminer les équations horaires $\rho(t)$ et $\theta(t)$ du mouvement du point *M*.

3) Représenter l'allure de la trajectoire dans le plan *xOy*.

Exercice 5

Un solide de masse *m* est en équilibre sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Dans les questions 2 et 3 le contact entre le solide et le plan incliné est supposé sans frottements.



1) Rappeler à quelles conditions un solide est en équilibre.

2) L'équilibre est d'abord réalisé en maintenant le solide par un fil non élastique de masse négligeable. Écrire les lois de l'équilibre de ce solide. Déterminer la tension du fil.

3) L'équilibre est maintenant assuré par un fil élastique de raideur *k* dont la longueur à vide est l_o. Déterminer la longueur du ressort lorsqu'il maintient le solide sur le plan incliné.

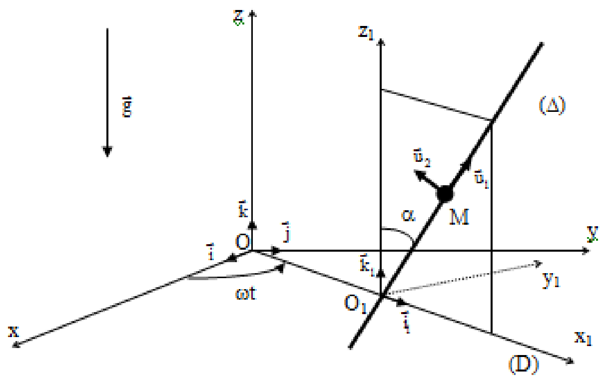
4) Le solide n'est plus maintenu par un fil mais on suppose que le coefficient de frottement solide entre le solide et le plan est μ. Démontrer que le solide ne peut être en équilibre que si l'angle α est inférieur à un angle que l'on déterminera.

Exercice 6

Soit (Δ) une tige (de vecteur unitaire directeur $\vec{u}_1$) passant par O_1, constamment contenue dans le plan $x_1O_1z_1$ et faisant un angle α constant avec l'axe O_1z_1 ($\alpha=(\vec{u}_1,\vec{k}_1)$=constante).
Un anneau (point matériel) M de masse m se déplace sans frottement, le long de la tige (Δ).
La position du point M sur la tige est repérée par:

$$\overrightarrow{O_1M} = \lambda(t)\,\vec{u}_1$$

Le point M qui est en mouvement dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ est soumis en plus à la force $\vec{F} = -k\,\lambda(t)\,\vec{u}_1$ où k est une constante positive.
Soit $\vec{u}_2$ le vecteur unitaire, contenu dans le plan $x_1O_1z_1$ et directement perpendiculaire à $\vec{u}_1$.



1°) Exprimer dans la base $(\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$:

a) La vitesse relative et la vitesse d'entraînement du point M.

b) Les accélérations : relative, d'entraînement et de Coriolis du point M.

2°) En appliquant le PFD dans R_1, déterminer l'équation différentielle du mouvement du point M ainsi que la réaction exercée sur M.

3°) En appliquant le théorème du moment cinétique dans R_1, retrouver la réaction exercée sur M.

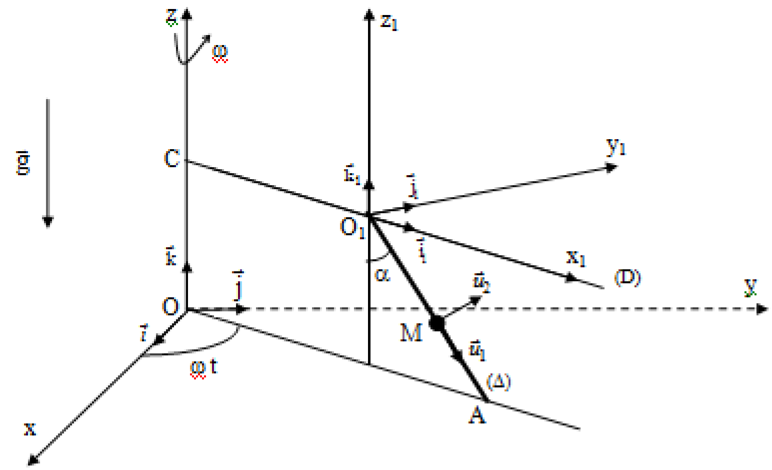
Exercice 7

On considère le repère R(Oxyz) (repère absolu galiléen) muni de la base OND $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Dans le plan horizontal situé à la côte z = c (c est une constante positive), une droite (D) tourne autour de l'axe Oz (axe vertical et dirigé vers le haut) avec une vitesse angulaire constante ω . La droite (D) coupe l'axe Oz au point C tel que $\overrightarrow{OC} = c\,\vec{k}$.

Soit un repère $R_1(O_1x_1y_1z_1)$ (repère relatif non galiléen) muni de la base OND $(\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$ tel que l'axe O_1x_1 est porté par la droite (D) et $\vec{k}_1 = \vec{k}$. Soit $\vec{\Omega}(R_1/R) = \omega\,\vec{k}$ le vecteur rotation de (R_1) par rapport à (R). Dans le plan de côte z = c, l'origine O_1 de (R_1) est animée d'un mouvement circulaire uniforme autour de l'axe Oz. On pose alors $\overrightarrow{CO_1} = a\,\vec{i}_1$ où a est une constante positive.

Soit (Δ) une tige rectiligne (de vecteur unitaire directeur $\vec{u}_1$) passant par O_1, constamment contenue dans le plan $x_1O_1z_1$ et faisant un angle $\beta = (\pi - \alpha)$ constant avec l'axe O_1z_1. On pose alors l'angle $\alpha = (-\vec{k}_1, \vec{u}_1) =$constante, avec ($0\langle\alpha\langle\pi/2$).
Un anneau (point matériel) M de masse m se déplace sans frottement, le long de la tige rectiligne (Δ). La position du point M sur la tige est repérée par le vecteur position $\overrightarrow{O_1M} = \lambda(t)\,\vec{u}_1$.

Le point M qui est en mouvement dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ est soumis en plus à la force $\vec{F} = -K\,\lambda(t)\,\vec{u}_1$ où K est une constante positive.
Soit $\vec{u}_2$ le vecteur unitaire, contenu dans le plan $x_1O_1z_1$ et directement perpendiculaire au vecteur $\vec{u}_1$. Le vecteur unitaire $\vec{u}_3$ est telle la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ soit orthonormée et directe. La tige (Δ) coupe le plan xOy au point A.



1°) Exprimer dans la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$:

a) La vitesse et l'accélération du point O_1 dans le référentiel absolu R.
b) La vitesse relative et la vitesse d'entraînement du point M .
c) Les accélérations : relative, d'entraînement et de Coriolis du point M .

2°) a) Donner le bilan des forces exercées sur M dans (R_1).
b) En appliquant le PFD dans R_1, déterminer l'équation différentielle du mouvement du point M ainsi que la réaction exercée sur M .

3°) En appliquant le théorème du moment cinétique dans R_1, retrouver la réaction exercée sur M .