ECOLE NATIONALE DES SCIENCES APPLIQUEES DE TANGER
Contrôle continu n°2 (16 Janvier 2013)
Portables &Documents non autorisés !
Professeur Responsable : H. Samadi
Module : Analyse1
Durée : 2h30mn

Exercice 1 :

En utilisant les techniques du DL, calculer les limites éventuelles suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{xe^x - \ln(1+x) - \frac{3}{2}x^2}{\sin x - x\cos 2x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x) - \sin[\ln(1+x)]}{x^4}$$

Exercice 2

Soit $f : IR \to IR$ deux fois dérivable. On suppose que f et $f^{(2)}$ sont bornées, et on pose :

$$M_0 = \sup_{x\in IR} |f(x)| \quad ; \quad M_2 = \sup_{x\in IR} |f^{(2)}(x)| \quad .$$

1. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, montrer que :

$$\forall x \in IR, \ , \forall \ h > 0 \ : \ |f^{(1)}(x)| \leq \frac{2.M_0}{h} + \frac{hM_2}{2} .$$

2. Soit $M_1 = \sup_{x\in IR} |f^{(1)}(x)|$. Montrer que : $(M_1)^2 \leq 4M_0.M_2$

Exercice 3 :

I. Soit $f(x) = e^x$ *et* σ_n la subdivision $x_0 = 0, \ldots, x_k = \frac{k}{n}, \ldots, x_n = 1$ *de* $[0,1]$.

1. Calculez les sommes de Darboux $s(f,\sigma_n)$ *et* $S(f,\sigma_n)$ puis donner leur limite quand $n \to +\infty$.

2. f est-elle intégrable sur [0,1] ? si oui quelle est son intégrale ?

II. En utilisant la décomposition en éléments simple, calculer l'intégrale suivant :

$$\int_{-1}^{0} \frac{2x^4+1}{(x-1)^3(x^2+1)}\,dx$$

Exercice 4

1. Calculer la valeur de $A = \int_0^1 \ln(1+t^2)\,dt$.

2. Soit $n \in IN^*$. On pose $u_n = \int_0^1 (1+t^2)^{\frac{1}{n}}\,dt$.

   Donner un encadrement de la suite u_n et en déduire sa limite.

3. Montrer que, pour tout $u \in IR$, $u \geq 0$: $|e^u - 1 - u| \leq \frac{1}{2} u^2 e^u$.

4. Soit $t \in IR$, $0 \leq t \leq 1$. Montrer que :

$$\left| (1+t^2)^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\ln(1+t^2) \right| \leq \frac{1}{2n^2} (\ln 2)^2\, 2^{\frac{1}{n}}$$

5. Donner alors la limite de la suite $n.(u_n - 1)$