ROYAUME DU MAROC
UNIVERSITE ABDELMALEK ESSAADI
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Tanger

Année universitaire 2013-2014

TD N°1 : Mécanique du point
Rappel Mathématiques

Exercice n°1

Dans le repère R(Oxyz) muni de la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les trois vecteurs suivants :

$$\vec{OA} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k} \;;\; \vec{OB} = 4\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \;;\; \vec{OC} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$$

1°/ Calculer les composantes des vecteurs $\vec{CA}$ et $\vec{OA} + 3\vec{OB}$.

2°/ a) Calculer les produits scalaires $\vec{OA} \bullet \vec{OC}$, $\vec{OB} \bullet \vec{OC}$ et $\vec{CA} \bullet (\vec{OA} + 3\vec{OB})$

b) Calculer les produits vectoriels $\vec{OA} \wedge \vec{OB}$, $\vec{OA} \wedge \vec{OC}$ et $\vec{OB} \wedge \vec{OC}$.

c) Calculer les normes des vecteurs $\vec{CA}$, $(\vec{OA} + 3\vec{OB})$ et $\vec{OC}$.

d) Déterminer le vecteur unitaire $\vec{u}$ porté par le vecteur $(\vec{OA} + 3\vec{OB})$.

e) Calculer l'angle $(\vec{CA}, \vec{u})$.

3°/ a) Calculer la norme du produit vectoriel $\vec{CA} \wedge \vec{u}$:
i) en utilisant le résultat 2°/e).
ii) en utilisant un calcul direct.
b) que représente cette norme.

4°/ Représenter le vecteur $\vec{OC}$ et déterminer ses cosinus directeurs.

5°/ a) Calculer le produit mixte $(\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$ et montrer qu'il est invariant par permutation circulaire.
b) Que représente ce produit mixte.

Exercice n°2

1°/ Montrer que la dérivée par rapport au temps d'un vecteur (fonction de t) de module constant est un vecteur qui lui est perpendiculaire.
2°/ On considère dans le plan (xOy) deux vecteurs unitaires perpendiculaire $\vec{u}$ et $\vec{v}$, tournant autour de Oz. En posant $(\vec{Ox}, \vec{u}) = \theta$, calculer $\dfrac{d\vec{u}}{d\theta}$ et $\dfrac{d\vec{v}}{d\theta}$.

Exercice n°3

Soient $\vec{r} = \sin bt\,\vec{i} + \cos bt\,\vec{j} + t^3\vec{k}$ une fonction vectorielle et $\lambda(t) = e^{-at}$ une fonction scalaire. Calculer $\dfrac{d}{dt}(\lambda\,\vec{r})$ pour t=0.

Exercice n°4 **Repère cylindrique**

La position d'un point M est donnée en fonction du temps dans le repère R(O,x,y,z) par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z).

1°/ Donner les expressions des coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) du point M en fonction de ses coordonnées cartésiennes.

2°/ Exprimer les vecteurs unitaires de la base mobile $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ en fonction de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

3°/ Exprimer le déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ puis dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$.

4°/ Donner les expressions des éléments de volumes en coordonnées cartésiennes et cylindriques.

Exercice n°5 **Repère sphérique**

La position d'un point M est donnée en fonction du temps dans le repère R (O,x,y,z) par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ).

1°/ Donner les expressions des coordonnées cartésiennes (x, y, z) du point M en fonction de ses coordonnées sphériques (r, θ, φ).

2°/ Exprimer les vecteurs unitaires de la base mobile $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ en fonction de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

3°/ Exprimer le déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ dans la base sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$.

4°/ Donner l'expression de l'élément de volume en coordonnées sphériques.

5°/ Donner l'expression de l'élément de surface en coordonnées sphériques.

Exercice n°6

Soient $V(x, y, z)$ une fonction scalaire quelconque et $\vec{f}(x, y, z)$ une fonction vectorielle donnée dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par ses trois composantes :

$$f_x = 4x^3 + 3y^2z^2 + 10x\,z^3, \quad f_y = 6x\,y\,z^2 + 5y + 2z, \quad f_z = 15x^2z^2 + 2y + 6x\,y^2z$$

1°/ Calculer $\overrightarrow{rot}[-\overrightarrow{grad}(V)]$.

2°/ Calculer $\overrightarrow{rot}\,\vec{f}$ et conclure.

3°/ Déterminer la fonction scalaire $U(x, y, z)$ dont dérive la fonction vectorielle $\vec{f}$. (On donne $U(0,0,0) = 0$).

Exercice n°7

Soit M un point de l'espace de coordonnées cylindriques (ρ, φ, z). En M est définie la fonction scalaire :

$$f(\rho, \varphi, z) = \rho^2 \sin\varphi + \rho\, z \cos\varphi + z^2.$$

1°/ Calculer la différentielle df.

2°/ Calculer $\overrightarrow{grad}\, f$ dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$.