

Correction CC - Novembre 2012

EX1 / 1) $A \neq \emptyset$ bornée $\Rightarrow \sup A$ et $\inf A$ existent.

$$\forall x \in A : \inf A \leq x \leq \sup A.$$

$$\forall x \in A : -\sup A \leq -x \leq -\inf A.$$

Donc $-\sup A$ est un minorant de $(-A)$ et $-\inf A$ est un majorant de $(-A)$.

par conséquent : $-\sup A \leq \inf(-A) \leq \sup(-A) \leq -\inf A$ (*)

En écrivaut (*) pour $-A$, on en déduit que :

$$-\sup(-A) \leq \inf(A) \leq \sup(A) \leq -\inf(-A) \quad (**)$$

En combinant (*) et (**) On en déduit la inégalité cherchée.

2) $A, B \subset \mathbb{R}^+$, $\forall x \in A, \forall y \in B : xy \geq \inf A \cdot \inf B$.

$\Rightarrow \inf A \cdot \inf B$ est un minorant de $(A \cdot B)$.

$$\text{Donc} \quad \inf A \cdot \inf B \leq \inf(A \cdot B).$$

Soit m un minorant de $(A \cdot B)$ alors $\forall x, y \in A, B : m, y \neq 0$.

$$m \leq xy.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} m \leq x \Rightarrow \frac{1}{y} m \leq \inf A.$$

$$\Rightarrow \frac{m}{\inf A} \leq y \Rightarrow \frac{m}{\inf A} \leq \inf B \Rightarrow m \leq \inf A \cdot \inf B.$$

$$\text{Donc} \quad \inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B.$$

$f : (0,1) \rightarrow [0,1)$ Croissante.

EX2 / $A = \{ x \in (0,1) \mid f(x) \leq x \}$.

$$\text{On a } f(1) \leq 1 \Rightarrow 1 \in A \Rightarrow A \neq \emptyset.$$

$\forall x \in A, f(x) \leq x \Rightarrow f(f(x)) \leq f(x)$ car f est $\uparrow$.

Donc $f(x) \in A$. $A \neq \emptyset$ minime. Donc $\inf A$ existe.

On pose alors $a = \inf A$.

d'autre part $a \leq 1$ car $1 \in A$ et $a \geq 0$ car 0 est un minant de A .
 Donc $a \in [0, 1)$. d'autre part :

$\forall x \in A, a \leq x \Rightarrow f(a) \leq f(x) \leq x$
 car $f(a)$ est un minant de $A \Rightarrow f(a) \leq a \Rightarrow a \in A$.

d'après ce qui précède de : $\forall x \in A, f(x) \in A \Rightarrow f(A) \subset A$

Comme $a \in A$ alors $f(a) \in A \Rightarrow a \leq f(a) \Rightarrow f(a) =$

Ex 3/. 1) $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k)}{3^k} \leq U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k}$
 $|u_{n+1} - u_n| = \left| \frac{\sin(n+1)}{3^{n+1}} \right| \leq \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Donc $\forall p \geq q : |u_p - u_q| \leq |u_p - u_{p-1}| + \dots + |u_{q+1} - u_q|$
 $\leq \left(\frac{1}{3} \right)^p + \dots + \left(\frac{1}{3} \right)^{q+1} = \left(\frac{1}{3} \right)^q \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{p-q+1}}{1 - 1/3} \right)$
 $\leq \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^q \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} 0$

Donc (u_n) est de Cauchy.

2) $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2^k + \ln(k)}$

De même $|v_{n+1} - v_n| \leq \frac{1}{2^{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Donc v_n est de Cauchy.

Ex 4) 1) Un simple tableau de variation montre que :
 $\forall x \in [0, +\infty[, 0 \leq f(x) \leq 7/3$

2) $u_n = f(u_{n-1})$ avec $f(x) = 2 + \frac{1}{1+x}$, $f \circ f(x) = \frac{7x+9}{3x+4}$
 On considère $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
 et on conclut selon le cours.