ROYAUME DU MAROC
UNIVERSITE ABDELMALEK ESSAADI
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Tanger

Année universitaire 2013-2014

TD N°7 : Mouvement d'un point matériel dans un champ de force centrale

Exercice 1

Une particule de masse m est soumise de la part du point O à une force d'attraction newotonienne $\vec{f} = -\frac{k}{r^2}\vec{u}$. Sa position initiale est un point M_0, à la distance r_0 de O. Le vecteur vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ est perpenduculaire à $\overrightarrow{OM_0}$ et de module v_0. Discuter la nature de la trajectoire selon les valeurs du paramètre v_0 .

Exercice 2

Une particule de masse m est soumise à une interaction newtonienne de force $\vec{f} = -\frac{k}{r^2}\vec{u}$ de la part d'un point O. Trouver la relation qui lie son énergie E, la constante K, le paramètre p et l'excentricité e de sa trajectoire.

Exercice 3

Mouvement d'un satellite artificiel autour de la terre

Données numériques :

• Masse de la Terre $M_T = 6.10^{24}$ kg
• Rayon de la Terre R_T = 6 400 km
• Constante de gravitation universelle $G = 6,67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}
• Période de rotation de la Terre (dans le référentiel géocentrique) T_o = 86 164 s

La Terre, de masse M_T et de centre O origine du référentiel géocentrique (R) galiléen, a une répartition de masse à symétrie sphérique. Un satellite, assimilé à un point matériel S de masse m ($m << M_T$), est animée dans (R) d'une vitesse $\vec{v}$. On note r la distance à O du point S et on pose : $\overrightarrow{OS} = r\vec{u}$ Il subit uniquement la force de gravitation exercée par la Terre.

I. Force de gravitation et moment cinétique

1) Représenter sur un schéma la force de gravitation exercée par la Terre sur le satellite et donner l'expression vectorielle de cette force $\overrightarrow{F(r)}$.

2) Moment cinétique :

a) Donner l'expression du moment cinétique$\overrightarrow{L_0}$ par rapport au point O de la masse m.

b) Démontrer la relation (théorème du moment cinétique) :

$$\frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt} = \overrightarrow{M_0}(\vec{F}) = \overrightarrow{OS}\Lambda\vec{F}.$$

c) Comment nomme-t-on la grandeur $\overrightarrow{M_0}(\vec{F})$ Donner sa valeur dans le cas présent.

d) En déduire que le moment cinétique $\overrightarrow{L_0}$ constant au cours du temps et que le mouvement du satellite s'effectue donc dans un plan contenant le centre des forces O et perpendiculaire au moment cinétique $\overrightarrow{L_0}$

Dans la suite on utilisera la base cylindrique $(\vec{u}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ avec $\overrightarrow{u_z}$ vecteur unitaire suivant la direction et le sens du moment cinétique $\overrightarrow{L_0} = L_0\, \overrightarrow{u_z}$ et $(\overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ base polaire dans le plan du mouvement. Le point S est repéré par ses coordonnées polaires r et θ.

II. Étude du mouvement du satellite

Le satellite est sur une **orbite circulaire** autour de la Terre à l'**altitude** *h*.

1) Définir le référentiel géocentrique. Est-il galiléen pour l'étude du mouvement du satellite ?

2) Montrer par les 3 différentes méthodes suivantes que le mouvement est uniforme :

> **a)** En exprimant le travail élémentaire δW de la force de gravitation au cours d'un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ entre les instant *t* et *t* + *dt* et en appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre ces instants.
>
> **b)** En utilisant la définition du moment cinétique *Lo* qui est une grandeur constante au cours du mouvement.
>
> **c)** En exprimant le vecteur accélération $\vec{a}$ en coordonnées polaires et en appliquant le principe fondamental de la dynamique, montrer alors que l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ est nulle. Donner l'expression de la vitesse *v* en coordonnées polaires et montrer que *v* est constant.

3) À partir du principe fondamental de la dynamique (voir 2c), déterminer la relation entre la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ et la distance $r = R_T + h$ entre le satellite et le centre de la Terre. En déduire alors la vitesse *v* du satellite en fonction de *G*, M_T, R_T et *h*.

4) Le satellite S.P.O.T. (**S**atellite **S**pécialisé dans l'**O**bservation de la **T**erre), lancé en 1986, évolue à l'altitude *h* = 832 km. Déterminer sa période de révolution *T*. Est-il géostationnaire ? Justifier.

5) La 3ème loi de Képler indique que le carré de la période *T* de révolution d'un satellite est proportionnel au cube du rayon *r* de son orbite. Quelle est l'expression littérale de la constante de proportionnalité apparaissant dans cette loi pour un satellite en orbite terrestre ?

6) En utilisant cette 3ème loi de Képler, déterminer la valeur de l'altitude d'un satellite géostationnaire

III. Vitesse d'évasion d'un satellite.

1) Montrer que la force $\vec{F}$ exercée par la Terre sur le satellite en orbite circulaire est une force centrale qui dérive d'une énergie potentielle *Ep* telle que :

$$E_p = -G\frac{M_T m}{r}$$

(avec comme origine de l'énergie potentielle celle pour *r* infini : $Ep(\infty) = 0$).

2) Exprimer l'énergie mécanique totale du satellite (en fonction de *v*, *m*, *G*, M_T, R_T et *h*).

3) Déterminer l'expression de la vitesse d'évasion (vitesse de libération) du satellite pour laquelle l'énergie mécanique *E* s'annule. Exprimer cette vitesse en fonction de *G*, M_T, R_T et *h*. Calculer cette vitesse d'évasion V_e pour un corps se situant à la surface de la Terre.

<u>Exercice 4</u> : Mouvement d'un point matériel dans un champ de gravitation.
Etude énergétique.

On considère la Terre de masse M_T et de centre O origine du référentiel géocentrique galiléen (R). On note r la distance à O d'un point M quelconque de l'espace et on pose : $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}$,
Un satellite, assimilé à un point matériel M de masse m ($m \ll M_T$), est animée dans (R) d'une vitesse $\vec{v}$, Il subit uniquement la force de gravitation exercée par la Terre :

$$\vec{F} = -\frac{K}{r^2}\vec{u} \text{ (K constante positive).}$$

I. Mouvement plan

1) On note G la constante universelle de gravitation. Donner l'expression de K.

2) Montrer que le moment cinétique par rapport au point O de la masse m :
$\overrightarrow{L_0} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$ reste constante au cours du mouvement. En déduire que ce mouvement s'effectue dans un plan contenant le centre des forces O et perpendiculaire au moment cinétique $\overrightarrow{L_0}$.

Dans la suite on utilisera la base cylindrique ($\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z}$) avec $\overrightarrow{u_z}$ vecteur unitaire suivant la direction et le sens du moment cinétique $\overrightarrow{L_0} = L_0\overrightarrow{u_z}$ et($\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}$) base polaire dans le plan du mouvement. Le point M est repéré par ses coordonnées polaires r et θ.

3) *Moment cinétique et constante des aires.*

a) Exprimer Lo en fonction de r, θ (ou leurs dérivées par rapport au temps) et m.

b) On définit « la constante des aires » du mouvement par $C = r^2\dot{\theta}$. Justifier le terme « constante des aires »

c) Les conditions initiales à $t = 0$ du mouvement sont définies par :

$$r = r_0; \theta = \theta_0;\ \|\vec{v}\| = v_0;\ \alpha = \alpha_0\ avec\ \ \alpha = angle\ que\ fait\ \vec{v}\ \ avec\,\vec{u}: \alpha = (\vec{v}, \vec{u})$$

Exprimer *Lo en fonction de m, r0, v0 et* $\sin\alpha_0$ *et en déduire l'expression de la constante C.*

II. Étude énergétique

1) Montrer que la force $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle $E_P(r)$. Établir l'expression de cette énergie potentielle en la prenant par convention nulle à l'infini ($E_P(\infty) = 0$)

2) Définir l'énergie cinétique E_C de la masse m. L'exprimer en fonction de r, θ (ou leurs dérivées par rapport au temps) et m. En utilisant la définition de la constante des aires C exprimer l'énergie cinétique E_C en fonction de m, r, $\dot{r}$, et C.

3) Définir l'énergie mécanique E. Le système est-il conservatif ? Que peut-on dire alors de cette énergie mécanique E. Montrer que l'énergie mécanique E peut se mettre sous la forme :

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E'(r) avec\ E'(r) = -\frac{k}{r} + \frac{mC^2}{2r^2}\,(énergie\ potentielle\ effective)$$

Exprimer

4) Exprimer l'énergie mécanique E0 de l'état initial (t=0) en fonction de , m, r_0, v_0

III. Étude de l'énergie potentielle effective $E'(r)$ **: États liés, États de diffusion.**

1) Montrer que la fonction $E'(r)$ admet un minimum E'_m pour $r = r_m$. Exprimer E'_m et r_m en fonction de K, m, r_o, v_o et α_o.

2) Quelles sont les limites de cette fonction quand $r \to 0$ et $r \to \infty$. Tracer l'allure du graphe $E'_m(r)$.

3) On a$E - E'_m(r) \geq \frac{1}{2}m\dot{r}^2$. Indiquer les valeurs possibles que peut prendre r si

$E \geq 0$. Même question si $E < 0$. En déduire la condition sur E pour que la masse reste prisonnier du centre de force (états liés) et la condition sur E pour qu'elle échappe à l'attraction de O (états de diffusion).

4) Quelle est la nature du mouvement lorsque $E = E'_m$.

5) *Applications* :

a) Quelle est, en fonction de K, m, r_o la valeur minimale V_{om} (vitesse de libération) de v_o pour que la masse m échappe au centre de force O. (la valeur limite de l'énergie est alors : $E = 0$).

b) *Vitesse de libération V_{LT} de la gravitation de la Terre pour un objet se trouvant à la surface de la Terre* :

Exprimer K en fonction de la constante de gravitation
$G = 6,\ 67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2},$M_T = 6.1024$ kg, et la masse m. En prenant $r_o = R_T = 6\ 400$ km, en déduire l'expression de V_{LT} en fonction en fonction de G, M_T et R_T (rayon de la terre $R_T = 6400$ km). Calculer V_{LT}.