Epreuve d'Analyse 1- CP1

Novembre 2013 - Durée 2 Heures

Exercice 1:

Déterminer s'il y a lieu la borne inferieure et supérieur des parties suivantes :

$$A = \{a + \frac{b}{n} \;\; ; \;\; n \in \;\; IN^{*} et \; (a,b) \in (IR_{+}^{*})^{2} \;\; \}$$

$$B = \{ \; \frac{n}{m.n+1} \;\;\; ; \;\; (m,n) \in \;\; (IN^{*})^{2}$$

Exercice 2 :

1. *Pour* $n \in \; IN^{*}$, *exprimer* $(1+\frac{1}{n})^{n}$ *en fonction de* C_{n}^{k}
2. *On pose :* $u_{k} = \frac{C_{n}^{k}}{n^{k}}$ et $\forall k \in \{1,..,n-1\}$: $v_{k} = \frac{u_{k+1}}{u_{k}}$

a. *Montrer que* $\forall \;\; k \in \{1,..,n-1\}$ $\quad v_{k} \leq -\frac{1}{n} + \frac{n+1}{2n}$ puis $v_{k} \leq \frac{1}{2}$

b. *En déduire que* $\forall \;\; k \in \{1,..,n-1\}$ $\quad u_{k} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$

C. *Montrer alors que* $\forall n \in \mathrm{IN}^{*}$ $\quad (1+\frac{1}{n})^{n} \; < 3$

Exercice 3:

Soit la suite définie par : $u_{n} = \sqrt{n} - E(\sqrt{n}\;)$

1. *Calculer* $u_{n^{2}}$ et $u_{n^{2}+2n}$ *puis donner leur limite*
2. *La suite* u_{n} *est elle convergente ? si oui donner alors sa limite*

Exercice 4:

Soit u_{n} *une suite vérifiant l'inégalité suivante :*

$$\forall n \in IN \; , \;\; |u_{n+1} - u_{n}| \leq k.\alpha^{n} \qquad avec \quad \alpha \in [0,1[\;\; et \;\; k \in IR$$

Montrer que u_{n} *est une suite convergente*